ÉPREUVES GROUPÉES

Spécialité mathématiques

Mardi 1er février 2022

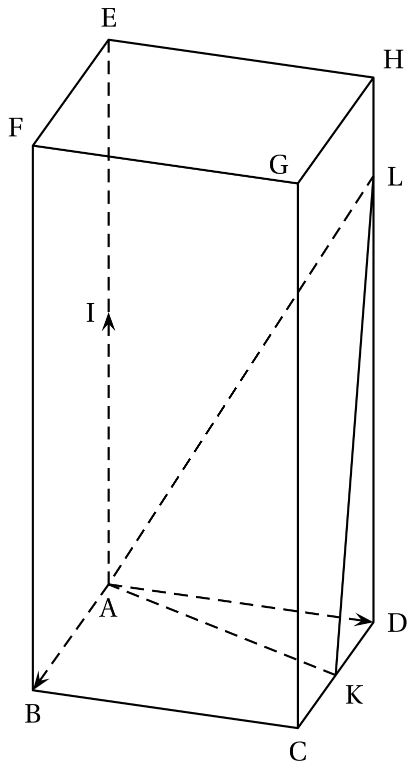
Durée de l'épreuve : 4 heures

- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Ce sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.
- Numérotez les pages.
- Faîtes les exercices dans l'ordre que vous voulez.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le mentionner sur votre copie.

EXERCICE 1. 6 points

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous.

Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\, \overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD},\, \overrightarrow{AI}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\,;\,1\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

① Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.

② (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(6\,;\,-3\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

(c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

(d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{40}{49}\,;\,\frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

③ (a) Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.

(b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).

(c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

EXERCICE 2. 7 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}.$$

On nomme $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

① Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.

② (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x]$.
Interpréter graphiquement cette limite.

(b) Préciser les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et de Γ.

③ On se propose de chercher les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par le point O.

(a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que la tangente $\mathscr{T}_a$ à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - xf'(x).$$

(b) Montrer que sur $]1\ ;\ +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

(c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$, en un nombre que l'on notera α.

(d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par le point O.
La courbe $(\mathscr{C})$ et la courbe Γ sont données en annexe.
Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

④ On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x.
Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 3. 7 points

Partie A Soit la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par
$f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

① (a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;\,+\infty[$.

(b) Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

(c) Montrer que, pour tout x strictement positif on a $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$.

(d) Calculer la limite de f en $+\infty$.

(e) Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

② (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

(b) Après avoir vérifié que $\alpha \in [14\,;\,15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

(c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie B : Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 5\ln(u_n + 3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \neq 0 \end{array}\right.$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 5\ln(x+3)$.

① Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

② Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$, et que cette solution est le nombre α défini dans la partie A question ②a.

③ Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

④ Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

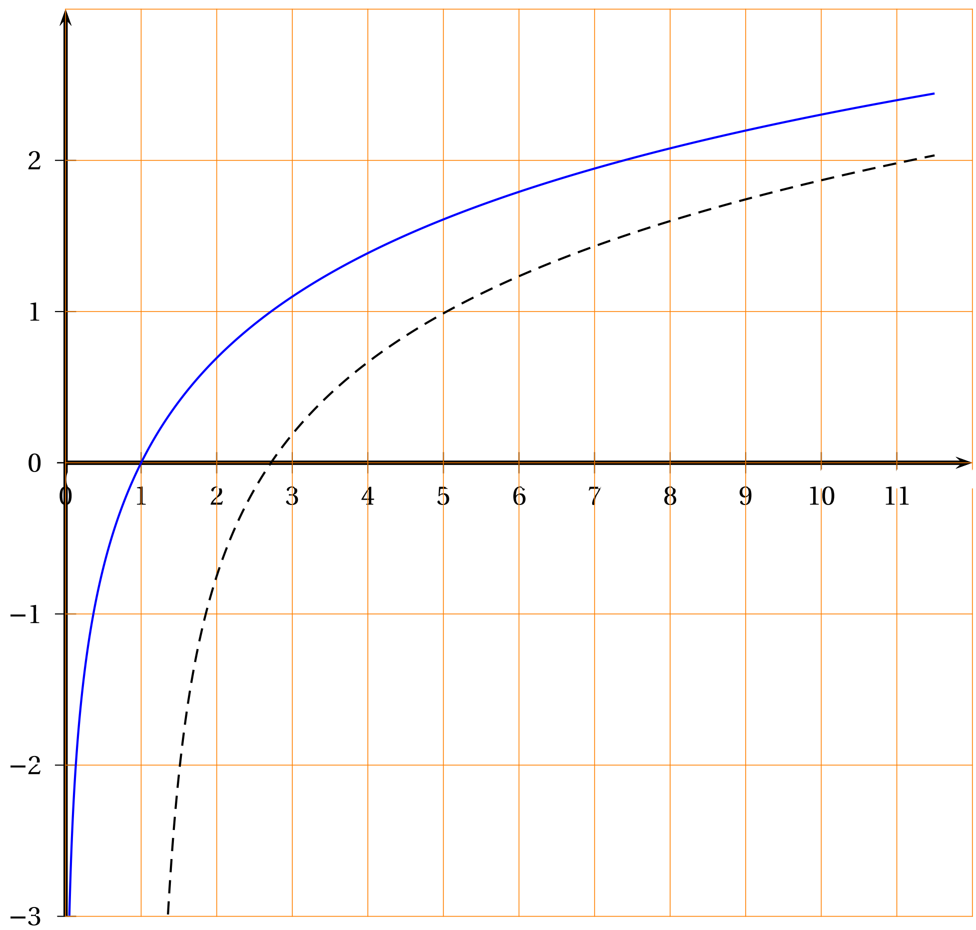
⑤ Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Annexe

Cette page est à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve

Annexe à rendre pour l'exercice n° 2

Représentations graphiques obtenues à l'aide d'un tableur



Courbe Γ représentative de la fonction ln

Courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f